سه‌شنبه
۱۴۰۳/۱۲/۲۸

تابع + توابع نمایی و لگاریتمی + فصل ۱ آمار و احتمال + فصل ۴ هندسه دهم و فصل ۱ هندسه یازدهم (درس ۱ و ۲)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی
ریاضیات

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان کیوان دارابی	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنوند ـ سجاد احمدی فؤاد خیرآبادی

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	–	الگو و دنباله + توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دانش آموزان عزیز ماز
امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

معرفی می‌کنم این شما و این هم دو تا از فصل‌های بسیار مهم کتاب، فصل تابع و فصل توابع نمایی و لگاریتمی.

این دو تا فصل از جذابترین و شیرین‌ترین فصل‌های ریاضی هستن، که از آن‌ها سرجمع حدود **۶** تا **۸** تست توی کنکور سوال میاد که واقعاً هر چقدر بخوان سختش کنن باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه که این تست‌ها رو مال خودت بکنی.

از مهمترین بخش‌های این دو تا فصل میشه به بخش‌های ویژگی‌های لگاریتم، معادله‌های نمایی و لگاریتمی، نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی، انتقال توابع، ترکیب و وارون توابع اشاره کرد. البته یادت باشه که خیلی از وقت‌ها از این دوتا فصل به صورت ترکیبی سوال میدن، مثلاً میان تابع لگاریتمی رو میبرن تو فاز انتقال توابع، پس مراقب باش که اخیراً رد پای سوال‌های ترکیبی، توی ریاضی هم مشاهده شده، همچنین روی رسم نمودار توابع هم مسلط باش که توی حل خیلی از تست‌ها غوغا می‌کنه و کار رو براموون درمیاره!

پیش‌نیازهای مطالعهٔ این بخش کدام مباحث هستند؟

با توجه به اینکه تابع مفهوم جدیدی است که در دوران دبیرستان با آن آشنا می‌شوید، بنابراین برای یادگیریش نیاز به مرور خاصی نیست.
لگاریتم و توابع نمایی هم بخش جدیدی است که یک پیش‌نیاز مهم دارد و آن هم تابع است که ما خودمان آن را آورده‌ایم!

این بخش‌ها در کدام قسمت‌های دیگر کاربرد دارند؟

برای حل سوالات بخش حد و پیوستگی و مشتق نیاز مبرم به تسلط روی مباحث این دو فصل مخصوصاً فصل تابع دارید. پس به خوبی آن‌ها را یاد بگیرید.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۶	۷	۷	۸	۴	۳
مباحث مطرح شده در سوال	دامنه تابع رسم نمودار تابع جزء صحیح انتقال توابع انتقال توابع+ تابع وارون دامنه تابع لگاریتمی ـ معادله لگاریتمی معادله نمایی	تابع ثابت انتقال توابع وارون تابع ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی قوانین لگاریتم نمودار توابع نمایی	توابع صعودی و نزولی انتقال توابع وارون تابع ـ ترکیب تابع دامنه تابع (ترکیب با تابع لگاریتمی) ویژگی‌های لگاریتم دامنه تابع لگاریتمی (ترکیب با دامنه توابع) تابع نمایی	انتقال توابع ـ دامنه تابع ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی (ترکیب با لگاریتم) وارون تابع تعریف تابع به صورت زوج مرتب تابع لگاریتمی (ترکیب با توابع صعودی و نزولی) ویژگی‌های لگاریتم ویژگی‌های لگاریتم	ترکیب تابع وارون تابع معادله لگاریتمی نمودار لگاریتمی+ انتقال تابع	وارون تابع تابع چندضابطه‌ای معادله لگاریتمی تابع اکیداً صعودی+ ترکیب با سهمی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان...

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- اگر $f(x)=(۲a-۱)x+a-b$ تابعی ثابت و تابع $g(x)=(b-۳)x+۲c+a$ همانی باشد، تابع خطی $y=(۲f-g)(x)$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۵)

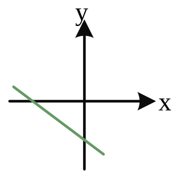
$f(x)=(۲a-۱)x+a-b$ تابع ثابت $\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$

$g(x)=(b-۳)x+۲c+a$ همانی $\Rightarrow \begin{cases} b-۳=۱ \\ ۲c+a=۰ \end{cases}$

$b=۴,\ a=\frac{۱}{۲},\ c=-\frac{۱}{۴}$

$y=f(x)=-\frac{۷}{۲}\ ,\ y=g(x)=x$

$y=(۲f-g)(x)=-۷-x$

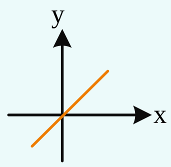


نمودار از ناحیه اول عبور نمی‌کند.

دو تابع معروف

A: تابع ثابت: به تابع $y=c$ که $c\in\mathbb{R}$ تابع ثابت گویند.

B: تابع همانی: به تابع $y=x$ که همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است، تابع همانی گویند.



گروه آموزشی ماز

۲- اگر $D_f=[-۴,a]$ و $g(x)=۸-۳x$ به طوری که $D_{fog}=[-۲,b]$، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$D_{fog}=\{x : x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$D_g=\mathbb{R}\ ,\ ۸-۳x\in[-۴,a]$

$-۴\le ۸-۳x\le a \Rightarrow -a\le ۳x-۸\le ۴$

$\frac{۸-a}{۳}\le x\le\frac{۱۲}{۳} \qquad D_{fog}=\left[\frac{۸-a}{۳},۴\right]$

$\begin{cases} b=۴ \\ \frac{۸-a}{۳}=-۲ \Rightarrow a=۱۴ \end{cases} \Rightarrow a-b=۱۰$

گروه آموزشی ماز

۳- هرگاه تابع $f(x)=(۲-a)x^۲-۴ax+۱$ در بازه $(-۲,۲)$ تابعی یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-۲<a<۰$ ۲) $a\ge ۱$ ۳) $۰<a<۲$ ۴) $۰<a<۱$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی ـ محاسباتی / ۱۱۰۲)

کافی است رأس تابع سهمی در این بازه نباشد.

$x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{۴a}{۲(۲-a)}=\frac{۲a}{۲-a}\Rightarrow\left|\frac{۲a}{۲-a}\right|\ge ۲$

$|a|\ge|a-۲|\xrightarrow{\text{توان ۲}}a^۲\ge(a-۲)^۲\Rightarrow a^۲\ge a^۲-۴a+۴\Rightarrow ۴a-۴\ge ۰\Rightarrow a\ge ۱$

گروه آموزشی ماز

۴- وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}+۴}$ خط $y=۴-۲x$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

در واقع جواب معادله $f^{-۱}(x)=۴-۲x$ را می‌خواهیم، پس جواب $f(x)=(۴-۲x)^{-۱}$ یعنی: $f(x)=\frac{۴-x}{۲}$ را در ابتدا به دست می‌آوریم.

$$x+\sqrt{x^{۲}+۴}=\frac{۴-x}{۲}\Rightarrow \sqrt{x^{۲}+۴}=\frac{۴-x}{۲}-x=\frac{۴-۳x}{۲}\quad x<\frac{۴}{۳}$$

$$۴x^{۲}+۱۶=۱۶+۹x^{۲}-۲۴x\Rightarrow ۵x^{۲}-۲۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۲۴}{۵}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

چون طرفین را وارون کردیم x به دست آمده عرض نقطه تلاقی است.

$$۴-۲x=۰\Rightarrow x=۲$$

نکات طلایی تابع وارون!

اگر در نمایش زوج‌مرتبی یک تابع، جای مولفه اول و دوم را در همه زوج‌مرتب‌ها با هم عوض کنیم، مجموعهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

به عنوان مثال

$$f=\{(-۱,۳),(۲,۱),(-۲,۳),(۰,۴)\}$$

$$f^{-۱}=\{(۳,-۱),(۱,۲),(۳,-۲),(۴,۰)\}$$

همانطور که می‌بینید وارون تابع f، تابع نمی‌باشد. حال، اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آن‌گاه تابع f را وارون‌پذیر می‌گوییم و $f^{-۱}$ را تابع وارون f می‌نامیم.

توجه!

اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد، در این صورت، وارون‌پذیر است و بالعکس، یعنی اگر تابعی وارون‌پذیر باشد می‌توان نتیجه گرفت که آن تابع یک‌به‌یک است.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $f(x)=\frac{x}{kx-۴}$ به طوری که $fof(۱)=۱$، مقدار $fof(-۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۳۱}$ ۴) $\frac{۱}{۴۱}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$$f(۱)=\frac{۱}{k-۴}\Rightarrow fof(۱)=f(\frac{۱}{k-۴})=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{۱}{k-۴}}{\frac{k}{k-۴}-۴}=۱\Rightarrow\frac{۱}{k-۴}=\frac{k}{k-۴}-۴\Rightarrow\frac{۱-k}{k-۴}=-۴$$

$$\Rightarrow ۱-k=-۴k+۱۶\Rightarrow ۳k=۱۵\Rightarrow k=۵$$

$$f(x)=\frac{x}{۵x-۴}\Rightarrow f(-۱)=\frac{-۱}{-۹}=\frac{۱}{۹}$$

$$fof(-۱)=f(\frac{۱}{۹})=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۵}{۹}-۴}=\frac{-۱}{۳۱}$$

گروه آموزشی ماز

۶- هرگاه $f(2x+3)=3x+4$ و $g^{-1}(4x-6)=5x+9$، مقدار $gof^{-1}(-2)$ چه عددی است؟

۱) -10 ۲) -12 ۳) -2 ۴) -14

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

$$f(2x+3)=3x+4 \xrightarrow{x=-2} f(-1)=-2$$

$$f^{-1}(-2)=-1 \Rightarrow gof^{-1}(-2)=g(-1)$$

$$5x+9=-1 \Rightarrow x=-2$$

$$g^{-1}(4x-6)=5x+9 \xrightarrow{x=-2} g^{-1}(-14)=-1$$

$$g(-1)=-14 \Rightarrow gof^{-1}(-2)=-14$$

گروه آموزشی ماز

۷- اگر $f(3-2x)=2-g(\frac{x}{2})$ و f و g توابعی وارون‌پذیر باشند، حاصل $4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

ابتدا داریم:

$$f(x)o(3-2x)=(2-x)og(x)o(\frac{x}{2})$$

با توجه به آن‌که: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ برای توابع وارون‌پذیر f و g برقرار است، پس:

$$(3-2x)^{-1}of^{-1}(x)=(\frac{x}{2})^{-1}o(g(x))^{-1}o(2-x)^{-1}$$

$$\frac{3-x}{2}of^{-1}(x)=(2x)og^{-1}(x)o(2-x) \Rightarrow \frac{3-f^{-1}(x)}{2}=2g^{-1}(2-x) \Rightarrow 3-f^{-1}(x)=4g^{-1}(2-x)$$

$$\xrightarrow{x=-2} 3-f^{-1}(-2)=4g^{-1}(4) \Rightarrow 4g^{-1}(4)+f^{-1}(-2)=3$$

گروه آموزشی ماز

۸- نقطهٔ $A(a,4)$ روی نمودار $y=2+f(\frac{1-x}{3})$ با نقطهٔ $A'(-2,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x)$ متناظر است. شیب خط گذرنده از A و A' کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{2}{9}$ ۳) $-\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{3}{10}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

مختصات نقاط را در ضابطه توابع وارد می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=a \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow 4=2+f(\frac{1-a}{3}) \Rightarrow f(\frac{1-a}{3})=2$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=b \end{cases} \Rightarrow b=3f(-4) \Rightarrow f(-4)=\frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{3}=-4 \Rightarrow a=13 \\ \frac{b}{3}=2 \Rightarrow b=6 \end{cases}$$

$$m_{AA'}=\frac{b-4}{-2-a}=\frac{6-4}{-2-13}=-\frac{2}{15}$$

گروه آموزشی ماز

۹- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{4x+k}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده و سپس طول نقاط آن را دو برابر می‌کنیم. اگر نمودار حاصل را k واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $f(x)$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. k کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳　　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

قرینه نسبت به محور y : $y=\sqrt{-4x+k}$

طول نقاط دو برابر : $y=\sqrt{-4(\frac{x}{2})+k}=\sqrt{-2x+k}$

k واحد انتقال به راست : $y=\sqrt{-2(x-k)+k} \Rightarrow y=\sqrt{-2x+3k}$

$\Rightarrow \sqrt{-2x+3k}=\sqrt{4x+k} \Rightarrow -2x+3k=4x+k \Rightarrow -4+3k=8+k \Rightarrow k=6$

۱) به سرزمین «تبدیلات تابع» خوش آمدید!

برای تابع $f(x)$ داریم:

۱) $f(x+k) \Rightarrow \begin{cases} k>0 \to \\ k<0 \to \end{cases}$
- k واحد در جهت افقی به چپ
- $|k|$ واحد در جهت افقی به راست

۲) $f(x)+k \Rightarrow \begin{cases} k>0 \to \\ k<0 \to \end{cases}$
- k واحد در جهت عمودی به بالا
- $|k|$ واحد در جهت عمودی به پایین

۳) $kf(x) \Rightarrow \begin{cases} k>1 \to \\ 0<k<1 \to \end{cases}$
- انبساط عمودی با ضریب k
- انقباض عمودی با ضریب k

۴) $-f(x) \to$ قرینه نسبت به محور x ها

۵) $f(kx) \Rightarrow \begin{cases} k>1 \to \\ 0<k<1 \to \end{cases}$
- انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{k}$
- انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$

۶) $f(-x) \to$ قرینه نسبت به محور yها

۲) دامنهٔ تابع مرکب چی میشه؟

دامنهٔ تابع $h(x)=fog(x)$ برابر است با: $\{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$

گروه آموزشی ماز

۱۰- تابع $f(x)=ax^4+(a-1)x^3-x+1$ در مجموعه اعداد حقیقی اکیداً یکنواست. مجموعه جواب نامعادله $fof(x)<f(2-x^3)$ کدام است؟

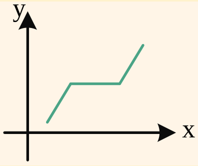
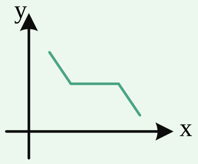
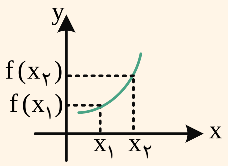
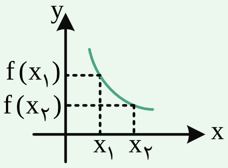
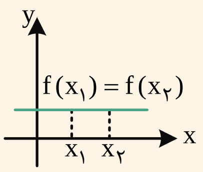
۱) $(-1,+\infty)$　　۲) $(1,+\infty)$　　۳) $(-\infty,1)$　　۴) $(-\infty,-1)$

پاسخ: گزینه ۴　　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

چندجمله‌ای درجه زوج نمی‌تواند اکیداً یکنوا باشد، پس $a=0$ و $f(x)=-x^3-x+1$، بنابراین f اکیداً نزولی است.

$f(f(x))<f(2-x^3) \Rightarrow f(x)>2-x^3 \Rightarrow -x^3-x+1>2-x^3 \Rightarrow x<-1$

هر آنچه باید درباره «توابع یکنوا» بدانید!

تابع	توضیح	تعریف ریاضی	مثال نموداری
صعودی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \geq f(x_۱)$	
نزولی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \leq f(x_۱)$	
اکیداً صعودی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره افزایش می‌یابد.	$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) > f(x_۱)$	
اکیداً نزولی	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره کاهش می‌یابد.	$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) < f(x_۱)$	
تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی)	با افزایش x، مقدار تابع f(x) همواره ثابت است.	$x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) = f(x_۱)$	

توجه!

به تابعی که نه **صعودی** و نه **نزولی** باشد، تابع **غیریکنوا** می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیریکنوا تابعی است که در دامنهٔ تعریف خود در بازه‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۱- نمودار تابع $f(x) = ۲ - \log_۲^{(ax+b)}$ نمودار وارون خود را در نقاطی به طول صفر و یک قطع کرده است. مقدار $a^۲ + b^۲$ کدام است؟ $(a<۰)$

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

چون a منفی است، پس f اکیداً صعودی است و نقطه برخورد f با $f^{-۱}$ همان نقطه برخورد f با $y = x$ است.

$$f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow ۲ - \log_۲^{b} = ۰ \\ x = ۱ \Rightarrow ۲ - \log_۲^{(a+b)} = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \\ \log_۲^{(a+۴)} = ۱ \Rightarrow a = -۲ \end{cases}$$

پس $a^۲ + b^۲ = ۲۰$ است.

f و f^{-1} کجا همدیگر رو قطع می‌کنن؟!

۱) اگر تابع f **صعودی باشد**، در این صورت نقاط برخورد دو تابع f و f^{-1} روی **نیمساز ناحیه اول و سوم** $(y = x)$ قرار دارند، بنابراین برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد، معادله $f(x) = x$ را حل می‌کنیم.

۲) اگر تابع f، تابعی **صعودی نباشد**، در این صورت، ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را به‌دست می‌آوریم و سپس با حل **معادله $f^{-1}(x) = f(x)$**، طول نقطه (نقاط) برخورد را پیدا می‌کنیم. (توجه کنید که در این حالت، برای حل معادله $f^{-1}(x) = f(x)$، از روش رسم هندسی هم می‌توانیم استفاده کنیم.)

تذکر!

در این تیپ سوالات، اگر به‌دست آوردن ضابطهٔ وارون تابع سخت باشد، بهتر است از راه‌های دیگری همچون یکنوایی توابع استفاده کنید.

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(0/4)^{x^2-6x} = (\frac{25}{4})^{2-x}$ باشد، حاصل $\log_2^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

$$(0/4)^{x^2-6x} = (\frac{2}{5})^{x^2-6x} \Rightarrow (\frac{25}{4})^{2-x} = (\frac{5}{2})^{4-2x} = (\frac{2}{5})^{2x-4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\log_2^{(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})} = \log_2^{(\frac{S}{P})} = \log_2^{(\frac{8}{4})} = 1$$

روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه داریم:

۱) $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۲) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = S$

۳) $\alpha\beta = \frac{c}{a} = P$

۴) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $x = 2^a$ یک جواب معادلهٔ $\log_4^x + \log_3^x = 1$ باشد، حاصل 12^a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

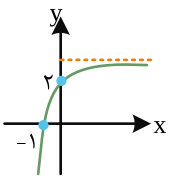
2^a را در معادله به جای x قرار می‌دهیم:

$$\log_4^{2^a} + \log_3^{2^a} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + a\log_3^2 = 1 \Rightarrow a(\frac{1}{2} + \log_3^2) = 1$$

$$\Rightarrow a\log_3^{2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow a = \log_{2\sqrt{3}}^3 \Rightarrow (2\sqrt{3})^a = 3 \Rightarrow 12^a = 9$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- نمودار تابع $f(x)=3+a\times 3^{bx+c}$ به صورت مقابل است. مقدار $f(1)$ کدام است؟



۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$

۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

$$\begin{cases} f(0)=2 \Rightarrow 3+a\times 3^{c}=2 \\ f(-1)=0 \Rightarrow 3+a\times 3^{c-b}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\times 3^{c}=-1 \\ a\times 3^{c-b}=-3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} 3^{b}=\frac{1}{3} \Rightarrow b=-1$$

$$f(1)=3+a\times 3^{b+c}=3+\underbrace{a\times 3^{c}}_{-1}\times 3^{b}=3-3^{b}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- یک نوع عنصر در پایان هر سال، ۴ درصد از جرم خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت چند سال ۲۰ درصد از جرم آن باقی می‌ماند؟
$(\log 2\simeq 0/301 , \log 3\simeq 0/48)$

۱) ۴۲ ۲) ۴۶/۶ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸/۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۳)

در پایان سال اول، ۰/۹۶ جرم، در پایان سال دوم، $(0/96)^{2}$ جرم و ...و در پایان سال nام، $(0/96)^{n}$ جرم باقی می‌ماند.

$$(0/96)^{n}=0/20 \Rightarrow n=\frac{\log 0/20}{\log 0/96} \Rightarrow n=\frac{\log 2-\log 10}{\log 96-\log 100}=\frac{\log 2-1}{5\log 2+\log 3-2}$$

$$=\frac{0/301-1}{5\times 0/301+0/48-2}=\frac{0/699}{0/015}=46/6$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- اگر خط d بر دو خط متمایز d' و d'' عمود باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) d' و d'' موازی هستند.

۲) اگر d' و d'' متقاطع و با خط D هم‌صفحه باشند، اما با d هم صفحه نباشند، آن‌گاه d بر خط D نیز عمود است.

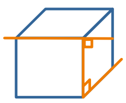
۳) اگر d' و D متقاطع باشند، آن‌گاه d بر خط D نیز عمود است.

۴) d' و d'' متعامد هستند.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۴)

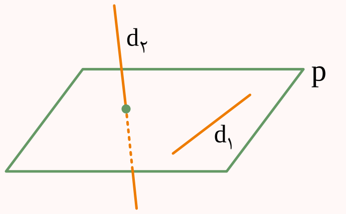
توجه داشته باشید عمود بودن در فضا، با عمود بودن در صفحه متفاوت است، دو خط متعامد در صفحه، حتماً یکدیگر را قطع می‌کنند. اما دو خط متعامد در فضا ممکن است متنافر باشند یعنی یکدیگر را قطع نکنند، مثل دو یال متنافر یک مکعب که بر هم عمودند.

حال که خط d بر دو خط d' و d'' عمود است، اگر d' و d'' هم‌صفحه باشند، آن‌گاه d بر صفحه شامل d'' و d' عمود است، در نتیجه بر هر خطی داخل این صفحه مانند D عمود است.

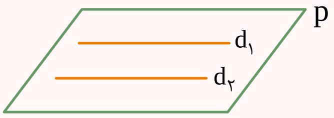


حالت‌های مختلف دو خط در فضا

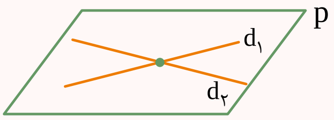
۱) دو خط d_1 و d_2 را **متنافر** گوییم، هرگاه نتوان آن‌ها را در یک صفحه مانند p قرار داد. (هم‌صفحه نباشند.)



۲) دو خط d_1 و d_2 **موازی‌اند**، هرگاه صفحه‌ای مانند p وجود داشته باشد که شامل هر دو آن‌ها باشد (هم‌صفحه باشند.) و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

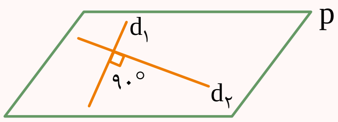


۳) دو خط d_1 و d_2 **متقاطع‌اند**، هرگاه صفحه‌ای مانند p وجود داشته باشد که شامل هر دو آن‌ها باشد (هم‌صفحه باشند.) و در یک نقطه مشترک باشند.

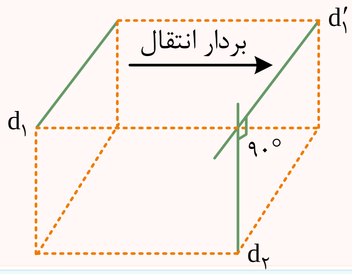


دو خط متعامد در صفحه و فضا

۱) دو خط d_1 و d_2 که در صفحه p قرار دارند، برهم عمودند هرگاه زاویه بین آن‌ها برابر 90° باشد.



۲) دو خط d_1 و d_2 غیرواقع در یک صفحه، برهم عمودند هرگاه انتقال یافته‌ای از d_1 مانند d_1' وجود داشته باشد که با d_2 در یک صفحه متعامد باشد.



اندک نکته‌ای

عمود بودن ۲ خط در فضا به معنای متقاطع بودن آن‌ها نیست.
۲ خط متعامد، می‌توانند متنافر یا متقاطع باشند.

گروه آموزشی ماز

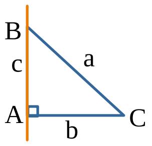
۱۷- یک مثلث قائم‌الزاویه را اگر حول یک ضلع قائمه‌اش دوران دهیم جسمی با حجم V و اگر حول وترش دوران دهیم جسمی با حجم $\frac{1}{2}V$ تشکیل می‌شود، در صورت دوران سطح این مثلث حول ضلع دیگر قائمه آن، جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}V$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}V$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}V$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}V$

پاسخ: گزینه ۳ **(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)**

با دوران سطح این مثلث حول ضلع قائمه AB یک مخروط به دست می‌آید که حجم آن برابر است با:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi b^2 c$$

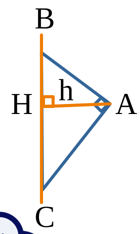


به همین ترتیب، اگر حول ضلع AC دوران کند، یک مخروط با حجم V' به دست می‌آید که:

$$V'=\frac{1}{3}\pi b c^2$$

حال اگر مثلث حول وتر دوران کند، دو مخروط با قاعده مشترک تشکیل می‌شود که طبق فرض حجم آن $\frac{1}{2}V$ است.

$$\frac{1}{2}V=\frac{1}{3}\pi h^2(BH+HC)=\frac{1}{3}\times\pi\frac{b^2c^2}{a^2}\times a=\frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{a}$$



بنابراین:

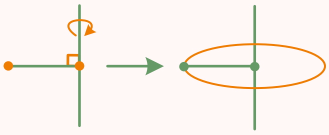
$$\frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{a}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\pi b^2 c \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

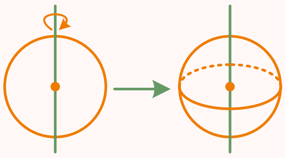
بچرخ تا بچرخیم

از دوران دادن شکل‌های هندسی طول یک محور، می‌توان اجسام و اشکال جدیدی ساخت که به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

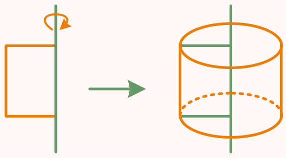
۱) از دوران پاره‌خطی عمود بر محور دوران، حول آن، یک دایره تشکیل می‌شود.



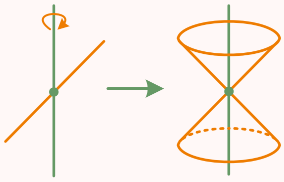
۲) از دوران یک دایره، حول هر قطر آن، یک کره ساخته می‌شود.



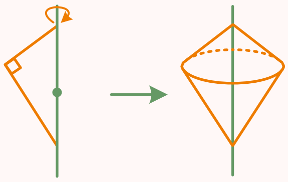
۳) از دوران یک مستطیل، حول یک ضلع آن، یک استوانه تشکیل می‌شود.



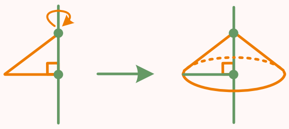
۴) از دوران یک پاره‌خط، حول خطی متقاطع و غیرعمود، یک رویه مخروطی تشکیل می‌شود. (ساعت شنی)



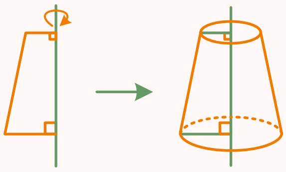
۵) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول وتر آن، دو مخروط با قاعده مشترک تشکیل می‌شود.



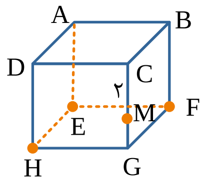
۶) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول ضلع قائمه آن، یک مخروط تشکیل می‌شود.



۷) از دوران یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، حول ساق عمود آن، یک مخروط ناقص تشکیل می‌شود.



۱۸- نقطه M روی یال CG از مکعب زیر به طول یال ۳ واقع شده است. از نقاط M و F و H صفحه‌ای می‌گذرانیم تا مکعب را برش دهد، مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟ $(MC=2)$



۱) $\sqrt{11}$

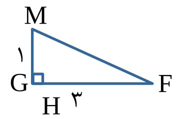
۲) $\frac{3}{2}\sqrt{11}$

۳) $2\sqrt{11}$

۴) $\frac{5}{2}\sqrt{11}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

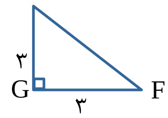
سطح مقطع یک مثلث متساوی‌الساقین است.



$$MF^2 = MG^2 + GF^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow MF = \sqrt{10}$$

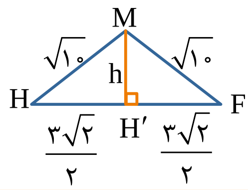
به همین ترتیب: $MH = \sqrt{10}$

از طرفی:



$$HF^2 = GH^2 + GF^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow HF = 3\sqrt{2}$$

حال مساحت مثلث را پیدا می‌کنیم:

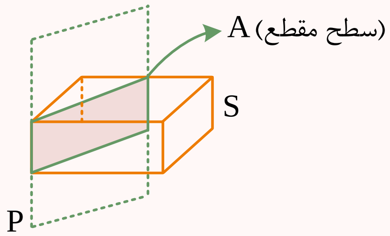


$$h = \sqrt{MF^2 - H'F^2} = \sqrt{10 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MFH}} = \frac{1}{2} h \times HF = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{11}{2}} \times 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{11}$$

مراقب باش دستت نَبُرِه!

برش: تقاطع یک شکل یا جسم هندسی (S) با یک صفحه (P) را برش گویند.

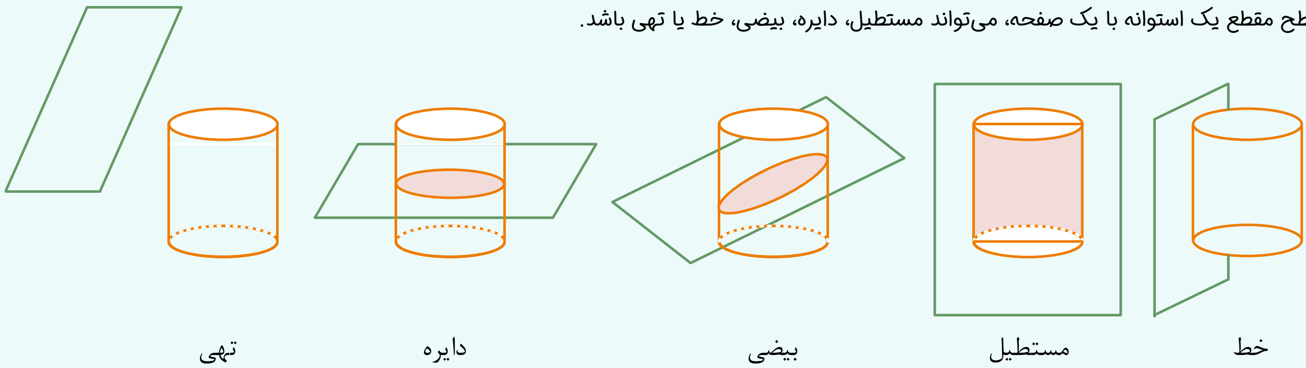


سطح مقطع یا سطح برش: مکان هندسی حاصل از تقاطع صفحه P و شکل یا جسم S را گویند.

به عبارتی دیگر، اگر سطح مقطع حاصل را A بنامیم، داریم: $A = S \cap P$

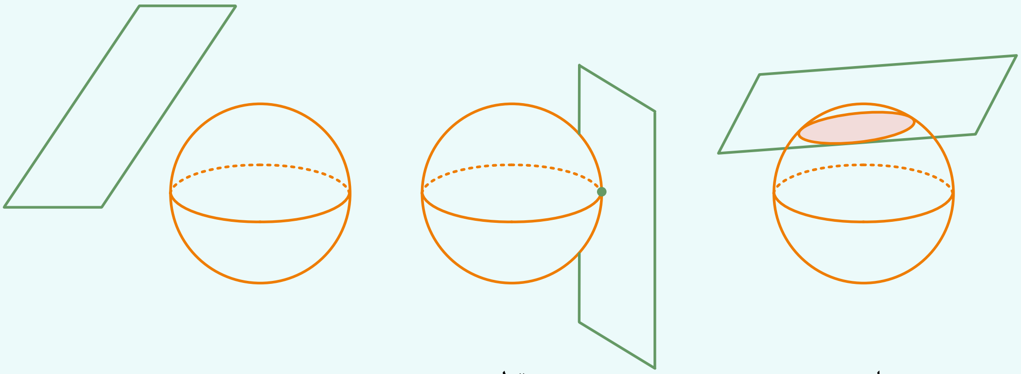
نکته طلایی ۱

سطح مقطع یک استوانه با یک صفحه، می‌تواند مستطیل، دایره، بیضی، خط یا تهی باشد.



نکته طلایی ۲

سطح مقطع یک کره با یک صفحه، می‌تواند یک دایره، یک نقطه یا تهی باشد.



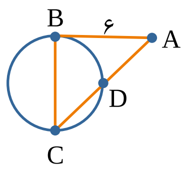
تهی — نقطه — دایره

نکته طلایی ۳

سطح مقطع یک رویه مخروطی با یک صفحه، می‌تواند یک دایره، یک بیضی، یک سهمی، یک هذلولی، دو خط متقاطع، یک خط یا یک نقطه باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۹- در شکل زیر، AB بر دایره مماس است. C نقطه‌ای روی دایره است به طوری که قاطع AC، دایره را در نقطه D قطع می‌کنند، اگر $BA=۶$ و $\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۳}$ آن‌گاه اندازه DC چقدر است؟



۱) ۴/۵

۲) ۵

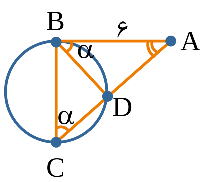
۳) ۵/۵

۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زاویه B ظلی و روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{BD}$ است، بنابراین:

$$\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\alpha$$



زاویه $B\hat{C}D$ محاطی و روبه‌روی کمان BD است، بنابراین:

$$B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}=\alpha$$

از طرفی، زاویه A در مثلث ABD و ABC مشترک است. بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{AD}{۶}=\frac{BD}{BC}=\frac{۶}{AC}$$

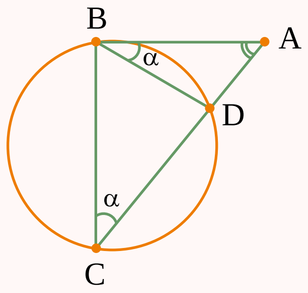
از طرفی $\frac{BD}{BC}=\frac{۲}{۳}$، بنابراین:

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{AC}\Rightarrow AC=۹\Rightarrow AD=۴,\ DC=AC-AD=۹-۴=۵$$

یک تیپ تست آشنا در تشابه و دایره

از آن‌جا که زاویه $A\hat{B}D$، ظلی است داریم: $A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$

و از آن‌جایی که $A\hat{C}B$، زاویهٔ محاطی هستش، داریم: $A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$



حالا بنابه تشابه در حالت تساوی دو زاویه، می‌تونیم بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}A\hat{B}D=A\hat{C}B\\ B\hat{A}C\ \text{(زاویه مشترک)}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\triangle}{ABD}\sim\overset{\triangle}{ACB}$$

چون ۲ مثلث متشابه هستن، رابطهٔ زیر بین اضلاع اون‌ها برقرار هستش:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{CB}$$

و میشه یکی از روابط طولی در دایره رو اثبات کرد:

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}\times\overline{AC}$$

$$(\text{مماس})^2=(\text{جزء})\times(\text{کل})$$

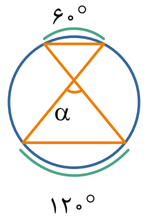
گروه آموزشی ماز

۲۰- در دایره‌ای به شعاع واحد، دو وتر موازی دو طرف مرکز دایره با اندازه‌های ۱ و $\sqrt{3}$ دو قاعده یک ذوزنقه را تشکیل می‌دهند. زاویه بین قطرهای این ذوزنقه چقدر است؟

۱) 60° ۲) 45° ۳) 75° ۴) 90°

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نظیر وتر با اندازه R، 60° است و در مورد وتر با اندازه $\sqrt{3}R$ این زاویه 120° است، بنابراین:



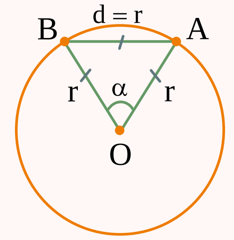
$$\alpha=\frac{60^\circ+120^\circ}{2}=90^\circ$$

دایره با چاشنی مثلثات

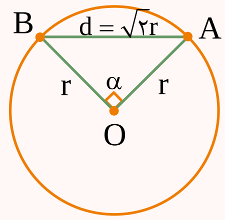
می‌خوایم برخی از وترهای خاص در دایره رو باهم بررسی کنیم؛ وتر به طول d در دایره رو در نظر بگیرید:

۱) اگه، $d=r$، یعنی وتر برابر با شعاع دایره باشه، کمان روبه‌رو به اون وتر 60° هستش:

$\Rightarrow O\hat{A}B=A\hat{O}B=\alpha=60^\circ$ مثلث متساوی‌الاضلاع است.



۲) اگه، $d=\sqrt{2}\,r$، یعنی وتر، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره باشد، کمان روبه‌رو به اون وتر، 90° هستش:

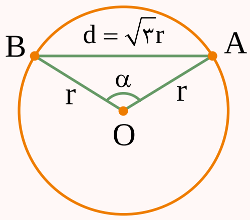


$$d^2=\left(\sqrt{2}\,r\right)^2=2r^2=r^2+r^2$$

$$\Rightarrow \overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2 \xrightarrow{\text{رابطه فیثاغورث برقراره}} A\hat{O}B=\alpha=90^\circ$$

۳) اگه، $d=\sqrt{3}\,r$، یعنی وتر $\sqrt{3}$ برابر شعاع دایره باشه، کمان روبه‌رو به اون وتر، 120° هستش:

قضیه کسینوس‌ها: $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(\alpha)=\overline{AB}^2$



$$r^2+r^2-2\cos(\alpha)r^2=\left(\sqrt{3}\,r\right)^2=3r^2$$

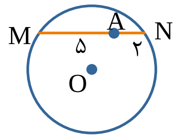
$$\Rightarrow 2r^2-2\cos(\alpha)r^2=3r^2 \Rightarrow -2\cos(\alpha)=1$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=120^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- A نقطه‌ای روی وتر MN از دایره است به طوری که $AN=2$ و $AM=5$، طول کوتاه‌ترین وتری که از A می‌گذرد، چقدر است؟



۱) $\sqrt{10}$

۲) $2\sqrt{10}$

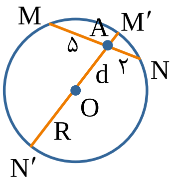
۳) $\sqrt{20}$

۴) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

روش اول:

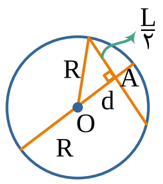
A نقطه‌ای دلخواه روی MN است. طبق قضیه روابط طولی خواهیم داشت:



$$AN \times AM = AM' \times AN' \Rightarrow 2\times 5=(R-d)(R+d) \Rightarrow R^2-d^2=10$$

از طرفی کوتاه‌ترین وتری که از A می‌گذرد، همان است که از A بر قطر شامل A عمود می‌شود.

بنابراین اگر طول وتر L باشد، در یک مثلث قائم‌الزاویه می‌توانیم $\frac{L}{2}$ را پیدا کنیم:



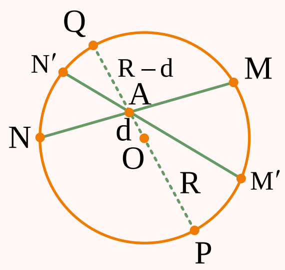
$$\frac{L}{2}=\sqrt{R^2-d^2} \Rightarrow L=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{10}$$

روش دوم:

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{2\times 5}=2\sqrt{10}$$

نقطهٔ سرگردان درون دایره!

فرض کنید A یه نقطهٔ دلخواه توی دایره $C(O,r)$ باشد و وترهای دلخواه MN و $M'N'$ از اون نقطه عبور کنن؛ طبق روابط طولی در دایره می‌دونیم:



$$MA \times AN = AN' \times AM'$$

در حالت خاص، اگر فاصلهٔ مرکز تا نقطه رو d بنامیم $(OA=d)$ داریم:

$$AQ \times AP=(R-d)(R+d)=R^2-d^2=AM\times AN$$

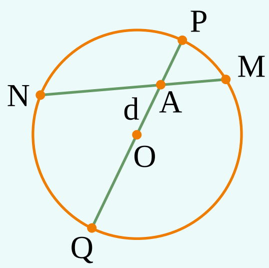
نکتهٔ خفن ۱

طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ دلخواه A در دایره، برابر است با:

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{AM\times AN}$$

نکتهٔ خفن ۲

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه در دایره، وتری هستش که بر قطر گذرنده از اون نقطه عموده.

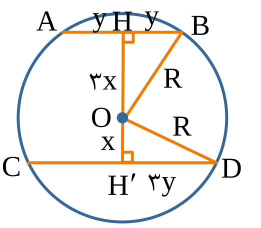


۲۲- در دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{10}$، دو وتر AB و CD ویژگی جالبی دارند. فاصله مرکز دایره از وتر AB، ۳ برابر فاصله آن از وتر CD است، از طرفی اندازه وتر CD دقیقاً ۳ برابر اندازه وتر AB است. کدام عدد، اندازه یکی از وترهاست؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

فقط دو بار از رابطه فیثاغورس در دو مثلث OHB و ODH′ استفاده می‌کنیم:



$$\begin{cases}(3x)^2+y^2=R^2\\ x^2+(3y)^2=R^2\end{cases}\Rightarrow 9x^2+y^2=x^2+9y^2\Rightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=y$$

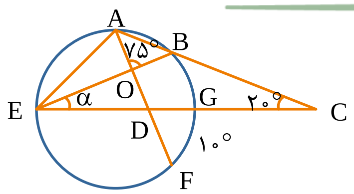
$$9x^2+x^2=R^2\Rightarrow 10x^2=R^2=(2\sqrt{10})^2$$

بنابراین:

$$10x^2=40\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2\Rightarrow y=2\Rightarrow\begin{cases}AB=2y=4\\ CD=6y=12\end{cases}$$

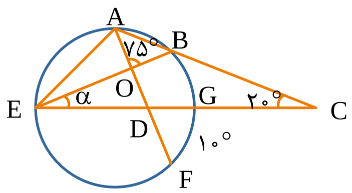
گروه آموزشی ماز

۲۳- در دایره مقابل، $\overset{\frown}{GF}=10^\circ$ و $B\hat{C}G=20^\circ$ و $A\hat{O}B=75^\circ$، اندازهٔ زاویه $B\hat{E}C$ چقدر است؟



۱) 50°
۲) 30°
۳) 45°
۴) 40°

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)



$$\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{EF}}{2}=75^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{EF}=150^\circ$$

از طرفی:

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{GF}+\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{EA}=360^\circ$$

$$\Rightarrow 150^\circ+10^\circ+\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{AE}=360^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{AE}=200^\circ$$

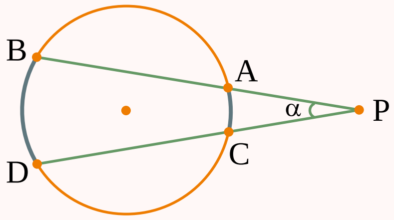
از طرفی:

$$\frac{\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BG}}{2}=20^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BG}=40^\circ$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{BG}=200^\circ\\ \overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{BG}=40^\circ\end{cases}\Rightarrow\overset{\frown}{AE}=120^\circ,\overset{\frown}{BG}=80^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{\overset{\frown}{BG}}{2}=40^\circ$$

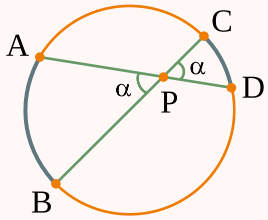
چندتا زاویهٔ مهم در دایره!

۱)



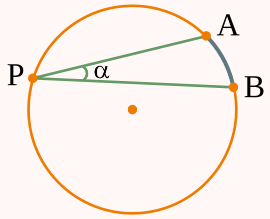
$$A\hat{P}C = \alpha = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

۲)



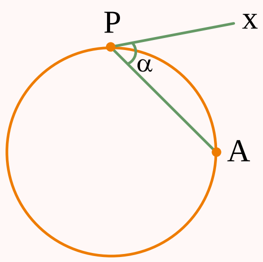
$$\underbrace{A\hat{P}B = C\hat{P}D}_{\text{متقابل به رأس}} = \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲}$$

۳) زوایه محاطی



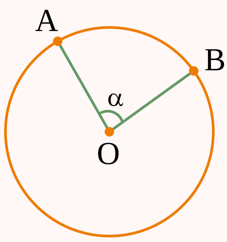
$$A\hat{P}B = \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۴) زاویه ظلی



$$A\hat{P}X = \alpha = \frac{\overset{\frown}{PA}}{۲}$$

۵) زاویه مرکزی



$$A\hat{O}B = \alpha = \overset{\frown}{AB}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- اگر $A=\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}$ و $P(A)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های A باشد، آن‌گاه $P(A)-A$ چند عضو دارد؟

۱) صفر　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲　　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$A=\{\{\ \},\{\{\ \}\}\} \Rightarrow P(A)=\{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\{\ \}\}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\}$$

$$\Rightarrow A \subseteq P(A) \Rightarrow |P(A)-A| = |P(A)| - |P(A)\cap A| = |P(A)| - |A| \Rightarrow ۲^۲ - ۲ = ۲$$

مجموعهٔ توانی

فرض کنید A یک مجموعه باشد، مجموعه توانی A $\left(P(A)\right)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(\text{Power set of } A)$ $P(A)=$ A مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه

مثال

$A=\{۱,۲,۳\}$

$P(A)=\{\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\},\{\ \}\}$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $A\cup C\subseteq A\cap B$ ، آن‌گاه کدام گزینه را نمی‌توان نتیجه‌گیری کرد؟

۱) $C\subseteq A$　۲) $C\subseteq B$　۳) $A\subseteq B$　۴) $A\subseteq C$

پاسخ: گزینه ۴　(آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

$$A\cup C\subseteq A\cap B\Rightarrow\begin{cases}A\subseteq A\cap B\xrightarrow{A\cap B\subseteq B}A\subseteq B\\ C\subseteq A\cap B\Rightarrow C\subseteq A\ ,\ C\subseteq B\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر $p\vee\sim q\Rightarrow\sim r$ و $\sim p\wedge q\Rightarrow\sim r$ گزاره‌هایی درست باشند، آن‌گاه کدام گزاره قطعاً درست است؟

۱) $r\wedge p\Rightarrow r\vee q$　۲) $r\vee p\Rightarrow r\vee q$　۳) $p\wedge q\Rightarrow r\wedge q$　۴) $q\Leftrightarrow r$

پاسخ: گزینه ۱　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

اگر $p\vee\sim q\equiv S$ ، آن‌گاه $\sim p\wedge q\equiv\sim S$ ، بنابراین:

$$(S\Rightarrow\sim r)\wedge(\sim S\Rightarrow\sim r)\equiv(\sim S\vee\sim r)\wedge(S\vee\sim r)\equiv\sim r\vee F\equiv\sim r$$

بنابراین:

$$\sim r\equiv T\Leftrightarrow r\equiv F$$

در گزینه ۱ مقدم نادرست است، پس ارزش کل گزاره بنا به انتفای مقدم همواره درست است.

$$r\wedge p\Rightarrow r\vee q\equiv F\wedge p\Rightarrow F\vee q\equiv F\Rightarrow q\equiv T$$

یه مرور منطقی‌مون نشه؟

$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

$(p\Rightarrow q)\equiv\sim p\vee q$

$\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q$

$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر $A=\{۲,۴,۶,...,۱۰۲\}$ و $B=\{۳,۶,۹,...,۱۰۲\}$ ، آن‌گاه $A^۲-B^۲$ چند عضو دارد؟

۱) ۲۱۳۲　۲) ۲۳۱۲　۳) ۲۲۳۱　۴) ۲۳۲۱

پاسخ: گزینه ۲　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

$$A^۲-B^۲=A^۲-A^۲\cap B^۲=A^۲-(A\cap B)^۲$$

$$\Rightarrow\left|A^۲-B^۲\right|=\left|A^۲\right|-\left|(A\cap B)^۲\right|=|A|^۲-|A\cap B|^۲$$

$$|A|=\left[\frac{۱۰۲}{۲}\right]=۵۱$$

اما:

$$|A\cap B|=\left[\frac{۱۰۲}{۶}\right]=۱۷$$

$$\Rightarrow\left|A^۲-B^۲\right|=۵۱^۲-۱۷^۲=(۵۱-۱۷)(۵۱+۱۷)=۳۴\times۶۸=(۳۴)^۲\times۲=۲۳۱۲$$

ضرب دکارتی دو مجموعه

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه $(A\times B)$، مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه اول خود را از مجموعه A و مؤلفه دوم خود را از مجموعه B می‌گیرند. به‌صورت ریاضی می‌توان نوشت:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\ ,\ y\in B\}$$

✓ منظور از $A^{۲}$، همان $A\times A$ است.

روابط بین تعداد اعضای مجموعه‌ها و ضرب دکارتی

($|A|$ نماد تعداد اعضای مجموعه A است.)

* $|A\times B|=|B\times A|=|A||B|$
* $|A\times B\cap B\times A|=|A\cap B|^{۲}$
* $|A\times B\cup B\times A|=|A\times B|+|B\times A|-|A\cap B|^{۲}$
* $|A\times B-B\times A|=|A\times B|-|A\cap B|^{۲}$

گروه آموزشی ماز

۲۸- مجموعه همه زیرمجموعه‌های A، B و $A\cup B$ را با $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cup B)$ نشان می‌دهیم. اگر $|P(A\cup B)|=|P(A)|+|P(B)|+۴۶۴$، آن‌گاه $||A|-|B||$ چقدر است؟ (A و B دو مجموعه مجزا هستند.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

با فرض اینکه $|A|=m$، $|B|=n$ و $m\geq n$، آن‌گاه:

$$۲^{m+n}-۲^{m}-۲^{n}=۴۶۴\Rightarrow ۲^{n}(۲^{m}-۲^{m-n}-۱)=۲^{۴}\times ۲۹\Rightarrow n=۴$$

$$\Rightarrow ۲^{m}-۲^{m-۴}-۱=۲۹\Rightarrow ۲^{m}-۲^{m-۴}=۳۰\Rightarrow ۲^{m-۱}-۲^{m-۵}=۱۵$$

$۲^{m-۱}-۲^{m-۵}$ فرد است، در نتیجه:

$$m-۵=۰\Rightarrow m=۵$$

$$\Rightarrow ||A|-|B||=۵-۴=۱$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\forall x\in\mathbb{Z};\exists y\in\mathbb{Z};y|x$
۲) $\forall x\in\mathbb{N};\exists y\in\mathbb{N};y=x+۱$
۳) $\exists x\in\mathbb{Z};\forall y\in\mathbb{Z};x|y$
۴) $\forall x\in\mathbb{N};\exists y\in\mathbb{N}:x=y+۱$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

زیرا: $x=y+۱\ ,\ x=۱\Rightarrow ۱=y+۱\Rightarrow y=۰\notin\mathbb{N}$

سورها

عباراتی که قبل از گزاره‌نماها به کار میرن و اونارو به گزاره تبدیل می‌کنن.

۱) **سور عمومی:** عبارت «به ازای هر مقدار» سور عمومی نام داره و با نماد $\forall$ مشخص میشه.

مثال اول

$\forall x\in\mathbb{N}\ ;\ x^{۲}\geq ۱$ (به ازای هر x طبیعی، $x^{۲}$ بزرگ‌تر یا مساوی یک هست.)

۲) **سور وجودی:** عبارت «به ازای برخی مقادیر» سور وجودی نام داره و با نماد $\exists$ مشخص میشه.

مثال دوم

$\exists K\in\mathbb{Z}\ ;\ K^{۲}+۱=۰$ (به ازای برخی مقادیر صحیح K، $K^{۲}+۱=۰$ است.)

ارزش گزارهٔ مثال اول درست و مثال دوم نادرست است.

نقیض گزاره‌های سوری

$$\sim(\forall x\ ;\ p(x)) \equiv \exists x\ ;\ \sim p(x)$$

$$\sim(\exists x\ ;\ p(x)) \equiv \forall x\ ;\ \sim p(x)$$

مثال سوم

$$\sim\left(\overset{\text{درست}}{\forall x\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{x}\ge ۰}\right)\equiv\left(\overset{\text{نادرست}}{\exists x\in\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{x}<۰}\right)$$

مثال چهارم

$$\sim\left(\overset{\text{نادرست}}{\exists x\in\mathbb{R}\ ;\ \frac{۱}{x}=۰}\right)\equiv\left(\overset{\text{درست}}{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \frac{۱}{x}\ne ۰}\right)$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $A\cup B=U$، آن‌گاه متمم مجموعه $\left[(A-(A-B))\cup((A-B)-B)\right]-B$ کدام است؟

۱) B ۲) $B-A$ ۳) A' ۴) $B'\cup A'$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

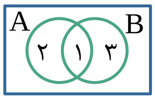
روش اول:

$$\left.\begin{array}{l}A-(A-B)=A\cap B\\(A-B)-B=A-B\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cap B)\cup(A-B)=A$$

$$\Rightarrow (A-B)'=U-(A-B)=A\cup B-(A-B)=B$$

روش دوم:

با انتخاب اعضای محدودی به عنوان مثال برای مجموعه‌های A و B، مجموعه موجود در صورت مسأله را می‌سازیم، چون: $A\cup B=U$ پس بیرون مجموعه A و B، عضوی در نظر نمی‌گیریم:



$$\begin{cases}A-(A-B)=\{۱,۲\}-\{۲\}=\{۱\}\\(A-B)-B=\{۲\}-\{۱,۳\}=\{۲\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \{۱,۲\}-\{۱,۳\}=\{۲\}\Rightarrow \{۲\}'=\{۱,۳\}=B$$

جمع مجموعه‌ها جَمعِه!

مجموعه تهی: مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداره و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشون داده میشه.

مجموعه مرجع: در هر مسئله، همهٔ مجموعه‌های مورد بررسی، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع هستن.

به این مجموعه، مجموعه مرجع یا جهانی گفته میشه و با نماد U یا S نشون داده میشه.

برخی روابط در جبر مجموعه‌ها

* $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
* $|A-B|=|A|-|A\cap B|$
* $|A'|+|A|=|U|$

(۱) $A\subseteq B\Leftrightarrow A-B=\varnothing$ (۲) $A-B=A\cap B'=A-(A\cap B)$

(۳) $(A\cap B)'=A'\cup B'$, $(A\cup B)'=A'\cap B'$

گروه آموزشی ماز